

SIMULASI NUMERIK INTERSEPSI DUA PROYEKTIL DI UDARA BERDASARKAN MODEL GERAK PELURU

Rohma Yuliani, Khalid Saifullah, Agus Dwi Purnomo, Valerianus Jehadu, Sholihun*

Departemen Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gadjah Mada, Sekip Utara BLS 21, Yogyakarta, 5528, Indonesia
email: sholihun@ugm.ac.id

ABSTRAK

Penelitian ini menyajikan model komputasi untuk analisis intersepsi proyektil dengan mempertimbangkan gaya hambat udara kuadrat ($F_d \propto v^2$). Persamaan gerak dimodelkan sebagai Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dan diselesaikan secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde 4/5. Sudut peluncuran proyektil penembak dioptimalkan untuk meminimalkan jarak terhadap target menggunakan algoritma optimasi. Hasil menunjukkan model berhasil menentukan sudut peluncuran optimal untuk mencapai intersepsi. Visualisasi mengkonfirmasi lintasan non-parabola yang khas akibat hambatan udara, yang secara signifikan mengurangi jangkauan proyektil. Model ini terbukti menjadi alat analisis yang efektif dan akurat untuk memprediksi lintasan dalam skenario intersepsi yang realistis.

Kata Kunci: Simulasi; Gerak Proyektil; Gaya Hambat Udara; Python

ABSTRACT

[Title: Symbolic-Numerical Simulation of Two Projectiles Aerial Collision] This research presents a computational model for the interception analysis of two projectiles, considering a quadratic drag force ($F_d \propto v^2$). The equations of motion are modeled as an Ordinary Differential Equation (ODE) and solved numerically using the Runge-Kutta method. The launch angle of the pursuing projectile is optimized to minimize the distance to the target using an optimization algorithm. The results show that the model successfully determines the optimal launch angle for interception. Visualization confirms the characteristic non-parabolic trajectory caused by air resistance, significantly reducing the projectile's range. This model is an effective and accurate analysis tool for predicting trajectories in realistic interception scenarios.

Keywords: Simulation; Projectile Motion; Air Drag Force; Python

PENDAHULUAN

Gerak proyektil merupakan salah satu fenomena dasar dalam mekanika klasik yang secara langsung merepresentasikan penerapan hukum Newton pada benda yang mengalami pengaruh gaya gravitasi. Kajian terhadap gerak proyektil menjadi sangat penting karena fenomena ini tidak hanya bersifat fundamental dalam pembelajaran fisika, tetapi juga memiliki banyak aplikasi nyata di berbagai bidang seperti balistik, teknik pertahanan, teknik sipil, olahraga, dan eksplorasi luar angkasa (Jacobsen et al., 2024; Lui et al., 2023, Yang et al., 2023). Memahami karakteristik lintasan proyektil dalam berbagai kondisi fisik memungkinkan kita untuk merancang sistem peluncuran, memprediksi trayektori objek, dan mengoptimalkan jarak jangkauan dalam berbagai skenario teknis. Dalam kondisi ideal

tanpa hambatan, lintasan proyektil berbentuk parabola dan dapat diselesaikan secara analitik. Namun dalam kondisi nyata, terutama pada kecepatan tinggi dan dalam medium atmosfer, pengaruh gaya hambat udara menjadi dominan dan menyebabkan perubahan bentuk lintasan, penurunan ketinggian maksimum, serta pengurangan jangkauan (Bradshaw, 2023; Chudinov, 2022). Oleh karena itu, untuk mendapatkan model fisika yang lebih representatif terhadap kondisi sebenarnya, penting untuk mengkaji gerak proyektil dengan mempertimbangkan gaya hambat udara.

Dalam kasus-kasus di mana penyelesaian analitik tidak memungkinkan atau menghasilkan bentuk persamaan yang terlalu kompleks, pendekatan numerik menjadi alat yang sangat

efektif. Salah satu metode numerik yang umum digunakan karena kestabilan dan akurasinya adalah metode Runge-Kutta orde empat (RK45) (Tang et al, 2024). Metode ini mampu menyelesaikan sistem persamaan diferensial biasa (PDB) secara iteratif dengan ketelitian yang lebih tinggi dibandingkan metode numerik orde rendah seperti Euler. Dalam konteks ini, metode RK45 sangat sesuai untuk menyelesaikan sistem gerak proyektil yang mengalami gaya gravitasi dan hambatan udara dalam dua dimensi. Lintasan proyektil yang awalnya hanya berada dalam satu bidang dapat diperluas menjadi sistem dinamik spasial, di mana kecepatan dan posisi memiliki dua komponen, dan gaya hambat bekerja pada vektor kecepatan total. Dengan memodelkan gaya hambat udara dalam bentuk kuadratik, simulasi dapat mengevaluasi seberapa besar gaya mempengaruhi lintasan proyektil dalam ruang dua dimensi.

Penggunaan bahasa pemrograman Python dalam fisika komputasi semakin berkembang karena sifatnya yang *open sources*, sintaksisnya yang mudah dipahami, serta dukungannya terhadap pustaka numerik dan visualisasi seperti NumPy dan Matplotlib (Alam, 2023; Tufino et al., 2025; Hamilton, 2024). Dalam penelitian ini, Python dimanfaatkan sebagai alat untuk mengimplementasikan metode RK45 dalam menyelesaikan sistem gerak proyektil dua dimensi. Dengan pendekatan ini, simulasi tidak hanya menghasilkan data numerik, tetapi juga memberikan gambaran visual tentang pengaruh gaya hambat terhadap dinamika gerak proyektil secara spasial.

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengembangkan simulasi numerik gerak proyektil dua dimensi dengan mempertimbangkan pengaruh gaya hambat kuadratik menggunakan metode RK45. Selain memberikan kontribusi dalam pemahaman dinamika proyektil dalam kondisi realistis, penelitian ini juga menunjukkan efektivitas metode numerik RK45 dalam menyelesaikan sistem fisika yang kompleks dan mendemonstrasikan penerapan pemrograman ilmiah dalam bidang fisika komputasi.

METODE

Penelitian ini menggunakan pendekatan simulasi numerik untuk menganalisis lintasan proyektil dengan mempertimbangkan pengaruh gravitasi dan hambatan udara. Model fisik yang diterapkan didasarkan pada hukum gerak Newton, di mana gaya hambat udara dimodelkan sebanding dengan kuadrat besar kecepatan proyektil. Secara matematis, dinamika proyektil dijelaskan oleh sistem persamaan diferensial biasa (PDB) berikut:

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y \quad (2)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{c}{m} v_{mag} v_x \quad (3)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{c}{m} v_{mag} v_y \quad (4)$$

Dengan $v_{mag} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ merupakan magnitudo kecepatan proyektil. Pada persamaan 1 hingga persamaan 4, x dan y merepresentasikan posisi horizontal dan vertikal proyektil, sementara v_x dan v_y adalah komponen kecepatan horizontal dan vertikalnya. Konstanta g adalah percepatan gravitasi (9.81 m/s^2), dan c adalah konstanta hambat udara. Proyektil diasumsikan berbentuk bola dengan jari-jari 0.05 m. Koefisien redaman $k = c/m$. Nilai konstanta hambat udara dihitung menggunakan persamaan (5)

$$c = \frac{1}{2} \rho A C_D \quad (5)$$

Dengan keterangan ρ adalah nilai rapat jenis udara ($1,225 \text{ kg/m}^3$), A adalah luas penampang yang terkena oleh udara saat bergerak, C_D adalah koefisien hambatan (0,5 untuk objek berbentuk bola). Sehingga diperoleh nilai $c \approx 0,00226 \text{ kg/m}$.

Simulasi dilakukan untuk dua proyektil, yaitu proyektil 1 (P1) dan sebuah target. P1 diluncurkan dari koordinat asal (0,0) dengan kecepatan awal $v_{0,P1}$ dan sudut peluncuran θ_{P1} terhadap horizontal. Komponen kecepatan awal P1 dihitung seperti persamaan 6 dan 7.

$$v_{x0,P1} = v_{0,P1} \cos(\theta_{P1}) \quad (6)$$

$$v_{y0,P1} = v_{0,P1} \sin(\theta_{P1})$$

(7)

Sementara itu, target dimulai dari posisi awal (x_{T0}, y_{T0}) dengan kecepatan awal $v_{0,T}$ dan sudut θ_T . Target bergerak mendekati titik asal P1, dengan komponen kecepatan awalnya diberikan pada persamaan 8 dan 9 berikut.

$$v_{x0,T} = -v_{0,T} \cos(\theta_T) \quad (8)$$

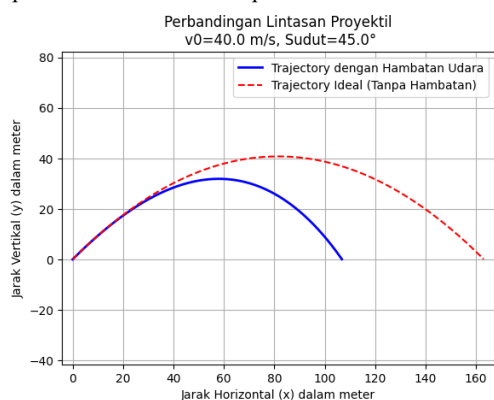
$$v_{y0,T} = v_{0,T} \sin(\theta_T) \quad (9)$$

Proyektil dianggap berinteraksi atau bertumbukan jika jarak minimum yang dicapai antara kedua lintasan kurang dari 0.10 m. Proses simulasi untuk setiap proyektil dihentikan ketika posisi vertikalnya y mencapai atau melewati nol, yang menandakan proyektil telah menyentuh permukaan tanah.

Sistem persamaan diferensial yang diperoleh diselesaikan secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde 4/5 (RK45) melalui pustaka `scipy.integrate.solve_ivp` pada python.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Tahap pertama pada penelitian ini yaitu dilakukan simulasi gerak proyektil tanpa hambatan udara untuk melihat lintasan proyektil yang dihasilkan yang kemudian dibandingkan dengan gerak proyektil menggunakan hambatan udara. Terlihat bahwa pada Gambar 1 gerak proyektil tanpa hambatan udara masih berbentuk parabola. Sedangkan lintasan yang dipengaruhi oleh hambatan udara berbentuk non-parabola, melengkung agak tajam ke bawah setelah melewati titik maksimum akibat dari gaya hambat kuadratik, yang tidak hanya mengurangi jangkauan horizontal dan vertikal, tetapi juga mempengaruhi perhitungan sudut yang diperlukan untuk intersepsi.

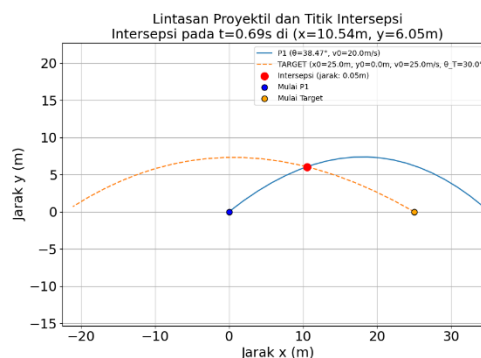


Gambar 1. Perbandingan gerak proyektil tanpa dan dengan hambatan udara

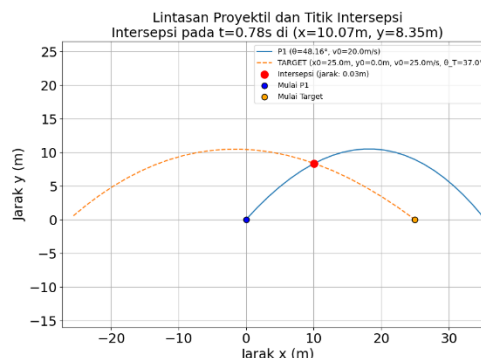
Selanjutnya yaitu dilakukan variasi kecepatan penembak (v_{p1}) sebesar 20 m/s, 45 m/s, dan 100 m/s dan variasi sudut untuk target (θ_T) masing-masing sebesar 30° , 37° , 45° , 53° , dan 60° . Dipilih nilai variasi untuk kecepatan target dengan rentang agak jauh untuk melihat lintasan dan efek yang ditimbulkan. Contoh hasil simulasi yang diperoleh dengan kecepatan proyektil 20 m/s, kecepatan target 25 m/s dan variasi sudut target (30° , 37° , 45° , 53° , dan 60°) dapat dilihat pada Gambar 2 dan Gambar 3. Sedangkan data hasil simulasi dengan variasi sudut dan kecepatan yang lain dapat dilihat pada Tabel 1, Tabel 2, dan Tabel 3. Untuk setiap tabel pada bagian kolom pertama bersesuaian dengan variasi θ_T yang digunakan. Gambar 2 dan Gambar 3 memberikan informasi kepada kita contoh hasil simulasi saat terjadi intersepsi dan tidak terjadi intersepsi. Apabila terjadi intersepsi, diberikan koordinat x dan y-nya, jarak intersepsi, sudut optimal peluncuran oleh

penembak agar terjadi intersepsi dan waktu terjadinya intersepsi. Sedangkan jika tidak terjadi intersepsi, maka hasil simulasi menunjukkan keterangan tidak terjadi intersepsi dan memberikan data jarak minimum yang tercapai.

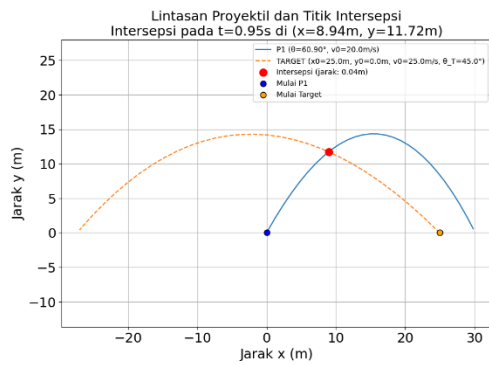
Pada simulasi penembakan pertama, proyektil 1 dan target diluncurkan dengan kecepatan awal 20 m/s dan 25 m/s (dibuat konstan) dengan variasi sudut yang telah ditentukan. Jarak awal kedua proyektil dibatasi 25 meter untuk melihat pengaruh sudut target terhadap sudut optimal. Setelah proses optimasi, diperoleh sudut peluncuran optimal bagi penembak sebesar 38.47° untuk mencapai jarak minimum 0.023 m yang berada dalam toleransi tabrakan yaitu 10 cm. Untuk Gambar 2 (a), tabrakan terjadi pada koordinat (10.54 m, 6.05 m). Gambar 2 (a), (b), (c) dan (d) menunjukkan keberhasilan intersepsi pada kecepatan penembakan 20 m/s dengan sudut target masing-masing sebesar 30° , 37° , 45° , dan 53° . Jarak terdekat yang dicapai pada kasus-kasus ini berada dalam toleransi tabrakan (Tabel 1).



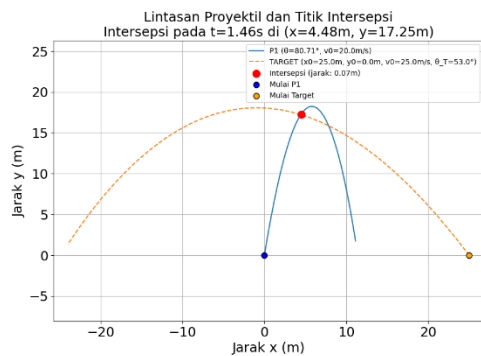
(a)



(b)

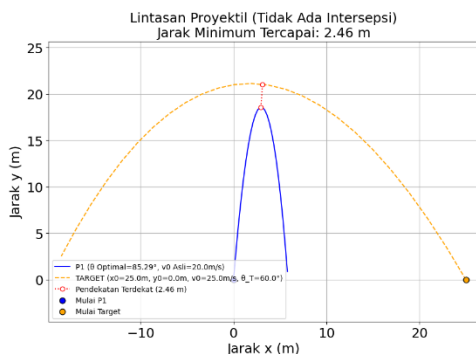


(c)



(d)

Gambar 2. Intersepsi Dua Proyektil dengan $v_{p1} = 20 \text{ m/s}$ dan (a) $\theta_T = 30^\circ$ (b) $\theta_T = 37^\circ$ (c) $\theta_T = 45^\circ$ (d) $\theta_T = 53^\circ$



Gambar 3. Dua Proyektil Gagal Berintersepsi dengan $v_{p1} = 20 \text{ m/s}$ dan $\theta_T = 60^\circ$

Tabel 1. Hasil Simulasi untuk $v_{p1} = 20 \text{ m/s}$

No	Sudut Optimal Penembak ($^\circ$)	Tumbukan	Jarak Terdekat Keduanya (m)
1	38.47	Ya	0.0230
2	48.16	Ya	0.0361
3	60.90	Ya	0.0423
4	80.71	Ya	0.0642
5	85.29	Tidak	2.4626

Tabel 2. Hasil Simulasi untuk $v_{p1} = 45 \text{ m/s}$

No	Sudut Optimal Penembak ($^\circ$)	Tumbukan	Jarak Terdekat Keduanya (m)
1	16.34	Ya	0.0544
2	22.69	Tidak	0.2036
3	27.14	Tidak	0.3192
4	27.27	Tidak	0.2635
5	29.61	Ya	0.0694

Tabel 3. Hasil Simulasi untuk $v_{p1} = 100 \text{ m/s}$

No	Sudut Optimal Penembak ($^\circ$)	Tumbukan	Jarak Terdekat Keduanya (m)
1	7.44	Ya	0.0480
2	8.72	Tidak	0.5209
3	10.67	Tidak	0.2335
4	11.84	Tidak	0.1903
5	13.59	Tidak	0.7670

Berdasarkan hasil yang diperoleh pada Gambar 3 terlihat bahwa dengan $\theta_T = 60^\circ$ tidak terjadi intersepsi antar proyektil. Hal ini disebabkan oleh lintasan target yang terbentuk dengan sudut 60° lebih tinggi dan lebih jauh dibanding lintasan dari penembak. Berdasarkan Tabel 1 hingga Tabel 3 terlihat bahwa semakin besar variasi kecepatan yang digunakan, semakin tidak terjadinya intersepsi. Hal ini disebabkan oleh semakin besarnya kecepatan awal target, pengaruh gaya hambatnya semakin besar yang menyebabkan kedua proyektil tidak intersepsi.

Selanjutnya dianalisis gerak proyektil dengan $\theta_T = 30^\circ$, $v_{p1} = 20 \text{ m/s}$ dan variasi kecepatan target sebesar 15 m/s, 20 m/s, 25 m/s, 30 m/s, dan 35 m/s. Tujuannya adalah untuk menganalisis pengaruh θ_T terhadap variasi kecepatan target, apakah akan menghasilkan intersepsi atau tidak. Hasil yang diperoleh dapat dilihat pada Tabel 4. Terlihat bahwa dengan peningkatan kecepatan awal target, kemungkinan terjadinya intersepsi menjadi semakin besar pada kondisi kecepatan penembak dan sudut target yang tetap ini. Dari hasil Tabel 4 dapat diketahui besarnya sudut optimal yang harus diatur agar dapat menumbuk proyektil.

Tabel 4. Hasil simulasi untuk variasi kecepatan target

v_T (m/s)	Sudut Optimal Penembak (°)	Tumbu kan	Jarak Terdekat Keduanya (m)
15	22.27	Ya	0.0719
20	29.87	Ya	0.0588
25	38.47	Ya	0.0230
30	47.17	Ya	0.1269
35	58.78	Ya	0.0511

KESIMPULAN DAN SARAN

Simulasi gerak proyektil dan sistem intersepsi dalam pengaruh gaya hambat udara kuadratik telah berhasil dilakukan dan diperoleh sudut peluncuran optimal. Secara visual, simulasi ini berhasil mengonfirmasi keberhasilan intersepsi dengan menampilkan koordinat dan waktunya, serta mampu memberikan informasi jarak dan titik pendekatan terdekat ketika intersepsi tidak terjadi. Diperoleh juga hasil bahwa semakin besar kecepatan awal yang digunakan, maka kebolehdjian intersepsi kedua proyektil akan semakin kecil. Untuk membuat simulasi yang lebih merepresentasikan kasus di dunia nyata, dapat dilakukan pengembangan model tiga dimensi, penambahan faktor arah angin, dan efek Magnus akibat rotasi yang dilakukan oleh proyektil.

DAFTAR PUSTAKA

- Alam, A. (2023). Leveraging the power of 'modeling and computer simulation' for education: An exploration of its potential for improved learning outcomes and enhanced student engagement. In 2023 International Conference on Device Intelligence, Computing and Communication Technologies (DICCT) (pp. 445–450). IEEE. <https://doi.org/10.1109/DICCT56244.2023.10110159>
- Bradshaw, J. L. (2023). Projectile motion with quadratic drag. *American Journal of Physics*, 91(7), 546-550. <https://doi.org/10.1119/5.0095643>
- Chudinov, P. (2022). Projectile motion in a medium with quadratic drag at constant horizontal wind. *European Journal of Physics*, 44(1), 015004. <https://doi.org/10.1088/1361-6404/ac9628>
- Hamilton, M. C. B. (2024). A journey in implementing computational physics from the

- ground up. *The Physics Teacher*, 62(2), 118-121. <https://doi.org/10.1119/5.0096417>
- Jacobsen, Ø. E. K., Kristoffersen, M., Dey, S., & Børvik, T. (2024). Projectile impact on plain and reinforced concrete slabs. *Journal of Dynamic Behavior of Materials*, 10(2), 137–159. <https://doi.org/10.1007/s40870-023-00379-6>
- Lui, D. G., Tartaglione, G., Conti, F., De Tommasi, G., & Santini, S. (2023). Long short-term memory-based neural networks for missile maneuvers trajectories prediction. *IEEE Access*, 11, 30819–30831. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2023.3262023>
- Tang, Y., Liu, Y., Zhang, H., Wang, J., & Li, Y. (2024). Research on projectile trajectory prediction based on improved sparrow search algorithm and regularized kernel extreme learning machine. *Journal of Physics: Conference Series*, 2791, 012014. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2791/1/012014>
- Tufiño, E., Guallichico, P., Ushino, M., & Zambrano, D. (2025). Design and construction of parabolic motion teaching equipment controlled with an arduino board and a mobile application for the physics laboratory of the ESPE university. *Journal of Physics: Conference Series*, 2950, 012022. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2950/1/012022>
- Yang, Y., Kim, D., & Choi, D. (2023). Ball tracking and trajectory prediction system for tennis robots. *Journal of Computational Design and Engineering*, 10(3), 1176–1184. <https://doi.org/10.1093/jcde/qwad054>