INVERS TERGENERALISASI MATRIKS ATAS FIELD $A(s) \in \Re[s]^{mxn}$

Wardi Syafmen
(Dosen Pendidikan Matematika PMIPA FKIP Universitas Jambi)

Abstrak

Bila $A(s) \in \Re[s]^{mxn}$ maka invers tergenerasi dilambangkan dengan $A(s)^+ \in \Re[s]^{mxn}$, $\forall s \in \Re$. Salah satu sifat penting dari invers tergeneralisasi matriks polynomial yang di adopsi atas matrik bilangan real adalah persamaan matriks polinomial P(s) X(s) Q(s) = K(s); $\forall s \in \Re$. Persamaan matriks polynomial P(s) X(s) Q(s) = K(s); $\forall s \in \Re$ mempunyai solusi jika dan hanya jika P(s) $P(s)^+$ X(s) $Q(s)^+$ Q(s) = K(s); $\forall s \in \Re$ sedangkan solusi umumnya adalah : X(s) = $P(s)^+$ K(s)$Q(s)^+$ + Y(s) – P(s) P(s)Y(s) Q(s)$Q(s)^+$ dengan $P(s)^+$, $Q(s)^+ \in \Re[s]^{mxn}$, masing-masing invers tergeneralisasi matriks polynomial P(s) dan Q(s), sedangkan Y(s) adalah matriks sembarang dalam dimensi X(s). Aplikasi invers tergeneralisasi matriks polynomial dapat dilihat dalam perhitungan invers kanan dan invers kiri matriks polynomial dan juga dalam sistem linear.

Kata kunci : Invers tergeneralisasi matriks, field

I. Pendahuluan

Bila $A(s) \in \Re[s]^{mxn}$, maka invers tergenerasi dilambangkan dengan $A(s)^+ \in \Re[s]^{mxn}$, $\forall s \in \Re$, diketahui A(s) $A(s)^+ = I_n$ berarti $A(s)^+$ sebagai invers kanan matriks A(s), dengan mengambil P(s) = A(s); X(s) = $A(s)^+$; Q(s) = I_n dan K(s) = I_n diperoleh
$A(s)^* = A(s)^+ + (I_n – A(s)^+ A(s)) Y(s)$
Jadi invers kanan dari matriks $A(s) \in \Re[s]^{mxn}$ adal;ah $A(s)^+$ dengan rumus
$A(s)^* = A(s)^+ + (I_n – A(s)^+ A(s)) Y(s)$
Kemudian diketahui $A(s)^+ A(s) = I_m$ berarti $A(s)^+$ sebagai invers kiri dari matriks A(s)
Berarti $A(s)^* = A(s)^+$ atau $A(s)^+ A(s) = I_m$ dengan mengambil P(s) = I_n; X(s) = $A(s)^*$; Q(s) = A(s) dan K(s) = I_m diperoleh
$A(s)^* = A(s)^+ + Y(s)(I_m – A(s) A(s)^+)$
Jadi invers kiri dari matriks $A(s) \in \Re[s]^{mxn}$ adal;ah $A(s)^*$ dengan rumus
$A(s)^* = A(s)^+ + Y(s)(I_m – A(s) A(s)^+)$ Y(s).

Dalam teori sistem dikenal ada dua sistem loop, yaitu sistem loop terbuka (open loop sistem) dan sistem loop tertutup(closed loop sistem), dan sisitem loop tertutup lebih dikenal dengan sistem kontrol feedback.

1.1. Permasalahan.

Dari latar belakang yang telah dikemukan di atas disusun permasalahan dalan tulisan ini sebagai berikut :

1. Bagaimana menentukan invers matriks atas field atau lapangan $\forall$ s , A(s) $\in \Re[s]^{mxn}$
2. Bagaimana aplikasinya dalam menentukan invers kanan dan kiri matriks polinomial dan sistem Kontrol

1.2. Tujuan Penelitian.

Pada dasarnya tujuan penelitian ini adalah untuk mencari jawaban dari pertanyaan yang dirumuskan dalam permasalahan di atas.

II. Metode Penelitian

Dalam rangka mencari jawabaan dari permasalahan di atas maka metode penelitian yang penulis gunakan adalah studi literaturpada pewrpustakaan dengan mengumpulkan bahan dari buku-buku, karya ilmiah dan jurnal yang berkait dengan masalan yang sedang di bahas.

III. Pembahasan.

Defenisi 3.1

Untuk setiap matriks $A \in \Re^{mxn}$, terdapat dengan tunggal matriks $A^+ \in \Re^{mxn}$ yang disebut dengan invers tergenerelisasi matriks A yang memenuhi kondisi-kondisi berikut :

(i). $AA^+A = A$
(ii). $A^+AA^+ = A^+$
(iii). $(AA^+)^T = AA^+$
(iv). $(A^+A)^T = A^+A$

Jika A(s) $\in \Re[\ s]^{mxn}$ merupakan matriks rasional maka $A(s)^+ \in \Re(s)^{mxn}$ didefenisikan dengan invers tergeneralisasi matriks rasional A(s) $\in \Re[\ s]^{mxn}$

Teorema 3.2.

Persaman matriks PXQ = K mempunyai solusi jika dan hanya jika $PP^+ KQ^+Q = K$

Sedangkan solusi umumnya adalah $X = P^+ KQ^+ + Y - P P^+ Y Q Q^+$ dengan P^+ dan Q^+ berturut-turut merupakan invers tergeneralisasi dari P dan Q sedangkan Y adalah matriks sembarang dalam dimensi X.

Teorema 3.3.

Misalkan A(s) $\in \Re[\ s]^{mxn}$ dan

$A(W,s) = \det \{ WI_n - A(s) A(s)^T \}$
$= a_0(s) W^n + a_1(s) W^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(s) W + a_n(s)$, Bila $a_0(s) = 1$, maka A(W,s) adalah polynomial karakteristik dari $A(s) A(s)^T$

Misalkan $a_n(s) = 0 \ \ldots,\ a_{k+1}(s) = 0$ sedangkan $a_k(s) \neq 0$ dan $A = \{ s_i \in \Re : a_k(s_i) = 0 \}$

Maka invers tergenweralisasi $A(s)^+$ untuk $s \in \Re - A$ adalah :

$A(s)^+ = - a_k(s)^{-1} A(s)^T [A(s) A(s)^T)^{k-1} + a_1(s) (A(s)A(s)^T)^{k-2} + \ldots + a_{k-1}(s) I_n]$

Dalam bagian berikut akan dibahas suatu sifat penting dari invers tergeneralisasi matriks polinominal yang diadopsi dari invers tergeneralisasi matriks atas lapangan bilangan real, khususnya dalam kaitannya dengan sistem persamaan matriks polinominal P(s) X(s) Q (s) = K (s) ; $\forall$ s $\in \Re$

Teorema berikut yang sudah dibuktikan oleh Penrose ,tanpa perubahan ternyata dapat diaplikasi pada matriks polynomial .

Teorema 3.4

Persamaan matriks polynomial P(s) X (s) Q (s) = K (s) mempunyai solusi jika hanya jika $P(s) P(s)^+ K(s) Q(s)^+ Q(s)=$

$K(s)$, $\forall$ s $\in$ $\Re$ sedangkan solusi umumnya adalah :
$X(s) = P(s)^+ K(s) Q(s) = Y(s) – P(s)^+ P(s) Y(s)Q(s) Q(s)^+$
dengan $P(s)^+$ dan $Q(s)^+$ masing – masing merupakan invers tergeneralisasi matriks P(s) dan Q (s) sedangkan Y(s) adalah matriks sebarang dalam dimensi X (s)

Bukti :
Menunjuk Teorema 3.2 sebelumnya dengan menganggap P(s) dan Q (s) dalam persamaan matriks P(s) X(s) Q (s) = K (s) adalah matriks atas $\Re[s]^{nxm}$ dan $\Re[s]^{nxm} \subseteq \Re(s)^{mxn}$.

3.1. Perhitungan Invers kiri dan kanan Matriks Polynomial $A(s) \in \Re[s]^{nxm}$

Diketahui invers kanan dan kiri matriks polynomial $A(s) \in \Re[s]^{nxm}$ terdefenisi sebagai matriks $A(s)^* \in \Re(s)^{mxn}$ yang memenuhi sifat berikut :
$A(s) A(s)^+ =- I_n$ dan $A(s)^+ A(s) = I_m$. Teorema berikut merupakan aplikasi langsung dari teorema 3.4

Teorema 3.5

Matriks polynomial $A(s) \in \Re[s]^{nxm}$ mempunyai invers kanan dan kiri jika dan hanya jika $A(s) A(s)^+ =- I_n$ dan $A(s)^+ A(s) = I_m$ dengan invers kanan dan kiri berturut-turut diberikan oleh rumus berikut ;

$$A(s)^* = A(s)^+ + (I_m - A(s)^+ A(s)) Y(s)$$

dan

$$A(s)^* = A(s)^+ + Y(s) (I_n - A(s) A(s)^+)$$

Dengan $Y(s) \in \Re(s)^{mxn}$ sembarang matriks rasional yang berdimensi $A(s)^+$.

Bukti :
($\Leftarrow$)
Diketahui $A(s) A(s)^+ =- I_n$, berarti $A(s)^+$ sebagai invers kanan matriks A(s) kaena invers kanan matriks A(s) terdefenisi sebagai $A(s)^+ = A(s)^*$ atau $A(s) A(s)^* = I_n$ sehingga berdasarkan teorema 3.4 di atas dengan mengambil $P(s) = A(s)$; $X(s) = A(s)^*$; $Q(s) = I_n$ dan $K(s) = I_n$ kemudian subtitusikan ke persamaan dalam teorema 3.5 maka diperoleh invers kanman matriks $A(s) \in \Re[s]^{nxm}$ adalah:

$$A(s)^* = A(s)^+ + (I_m - A(s)^+ A(s)) Y(s)$$

Hal yang sama dapat juga dilakukan untuk invers kiri matriks A(s) dimana diketahui $A(s)^+ A(s) = I_m$ berarti $A(s)^+$ sebagai invers kiri matriks A(s) kaena invers kiri matriks A(s) terdefenisi sebagai $A(s)^+ = A(s)^*$ atau $A(s)^* A(s) = I_m$ sehingga berdasarkan teorema 3.4 di atas dengan mengambil $P(s) = I_n$; $Q(s) = A(s)$; dan
$K(s) = I_m$ kemudian subtitusikan ke persamaan dalam teorema 3.5 maka diperoleh invers kiri matriks A(s) adalah $A(s)^* = A(s)^+ + Y(s) (I_n - A(s) A(s)^+)$

($\Rightarrow$)

Diketahui invers kanan matriks $A(s) \in \Re[s]^{nxm}$ adalah

$$A(s)^* = A(s)^+ + (I_m - A(s)^+ A(s)) Y(s)$$

Jika kedua ruas dari persamaan di atas dikalikan dari depan dengan matriks A(s) diperoleh

$$A(s)A(s)^* = A(s)\{A(s)^+ + (I_m - A(s)^+ A(s)) Y(s)\}$$
$$= A(s)\{A(s)^+ + (A(s) - A(s)\} Y(s)$$
$$= I_n \text{ (sebab } A(s) \in \Re[s]^{nxm} \text{ dan } A(s)^+ \in \Re(s)^{mxn})$$

Jadi terbukti
$A(s) A(s)^+ =- I_n$
Diketahui invers kiri matriks $A(s) \in \Re[s]^{nxm}$ adalah

$A(s)^* = A(s)^+ + Y(s) (I_n - A(s) A(s)^+)$

Jika kedua ruas dari persamaan di atas dikalikan dari belakang dengan matriks A(s) diperoleh

$A(s)^* A(s) = \{A(s)^+ + Y(s) (I_n - A(s)^+ A(s)) \} A(s)$

$= A(s)^+ A(s) + Y(s) \{(A(s) - A(s)\}$

Atau

$A(s)^* A(s) = A(s)^+ A(s) = I_m$ (sebab $A(s) \in \Re[s]^{nxm}$ dan $A(s)^+ \in \Re(s)^{mxn}$)

Jadi terbukti

$A(s)^* A(s) = I_m$

Jadi terbukti invers kanan dan kiri matriks $A(s) \in \Re[s]^{nxm}$ masing-masing memenuhi sifat-sifat $A(s) A(s)^+ =- I_n$ dan $A(s)^* A(s) = I_m$

3.2. Feedback Kompensator .

Seperti sudah dikemukakan pada bab pendahuluan, bahwa dalam teori sistem dikenal dua sistem loop, yaitu open loop sistem (sistem Loop terbuka dan closed loop (sistem loop tertutup).

Sistem loop terbuka adalah sistem dengan input atau control yang dipilih tidak mempunyai cara mempengaruhi keluaran (output) sitem tersebut. Sedangkan sistem loop tertutup adalah sistem dengan input atau control dimodifikasi dengan berbagai cara berdasarkan informasi sifat – sifat dari output sitem tersebut. Sistem loop tertutup juga disebut dengan sistem kontol feedback.

Contoh sistem loop terbuka dapat disajikan dalam bentuk blok diagram pada bagian pendahuluan dalam bagian berikut akan dibahas secara umum tentang sistem loop tertutup dan kaitannya dengan matriks invers tergeneralisasi.

Pada blok diagram dari sistem loop terbuka dan sistem loop tertutup dengan fungsi transfer G(s) , dengan u(s) input dan y(s) output. Dari sistem loop tertutup diperoleh :

u(s) = v(s) - F(s) y (s) ;atau u(s) = - F(s) y (s) + v(s) $F(s) \in \Re(s)^{mxn}$, dan v(s) adalah input baru.

Persamaan ini disebut juga dengan persamaan output feedback F(s) disebut dengan kompensator output dan fungsi transfer yang dihasilkan dinamai dengan H(s). Dari persamaan output feedback di atas, muncul suatu pertanyaan : kapan ada output feedback dalam sistem loop tertutup seperti persamaan di atas sedemikan sehingga sistem mempunyai fungsi transfer H(s) yang memenuhi

$G(s) F(s) H(s) = G (s) – H (s)$ atau $H(s) = (I_n + G(s) F(s)^{-1} G(s)$

Untuk menjawab pertanyaan di atas terlebih dahulu dibentuk fungsi transfer baru dari G(s) dan H(s) masing-masing sebut G ‘(s) dan H’(s) dengan memisalkan

$G’(s) = G(s) g(s)$ dengan $G’(s) \in \Re[s]^{nxm}$ dan g(s) adalah factor persekutuan terbesar dari semua penyebut matriks G(s). dengan cara yang sama, misalkan $H’(s) = H(s)h(s)$ dengan $H’(s) \in \Re[s]^{mxn}$ dan h(s) factor persekutuan terbesar dari semua penyebut matriks H(s) sehingga persamaan $G(s) F(s) H(s) = G (s) – H (s)$ berubah menjadi :

$G^{’}(s) F(s) H^{’}(s) = G^{‘}(s)h(s) – H^{’} (s) g(s)$ atau

$$\frac{G'(s)}{g(s)} \; F(s) \; \frac{H'(s)}{h(s)} = \frac{G'(s)}{g(s)} - \frac{H'(s)}{h(s)}$$

Teorema 3.6

Persamaan $\frac{G'(s)}{g(s)}$ F(s) $\frac{H'(s)}{h(s)}$ = $\frac{G'(s)}{g(s)}$ - $\frac{H'(s)}{h(s)}$ mempunyai solusi jika dan hanya jika

G'(s) G'(s)$^+$ [G '(s) h (s) – H ' (s) g (s)] H$'$(s)$^+$ H$'$(s) = G$'$(s) h(s) - H$'$(s)g (s)

Sedangkan kompensatornya adalah

F(s) = G'(s)$^+$ [G '(s) h (s) – H '(s) g (s)] H$'$(s)$^+$ + Y(s) - G$'$(s) G$'$(s) Y(s)H$'$(s)H$'$(s)$^+$

Dengan Y(s) adalah fungsi sembarang dalam s yang berdimensi F(s)

Bukti :

Pembuktian menggunakan teoema 3.4 dengan mengambil P(s) = P$'$(s) ; X(s) = F(s) ;

Q(s) = H$'$(s) dan K(s) = G '(s) h (s) – H '(s) g (s) akan terbukti teorema 3.6

IV. Kesimpulan

Persamaan matriks polynomial P(s) X (s) Q (s) = K (s) solusinya adalah : X(s) = P(s)$^+$ K(s) Q(s) = Y(s) – P(s)$^+$ P(s) Y(s)Q(s) Q(s)$^+$ dengan P(s)$^+$ dan Q(s) $^+$ masing – masing merupakan invers tergeneralisasi matriks P(s) dan Q (s) sedangkan Y(s) adalah matriks sebarang dalam dimensi X (s) Menentukan invers kanan dan kiri dari matriks A(s) $\in \Re[s]^{mxn}$ dan dalam teori sistem yang berkenaan dengan persamaan out put feedback yang memiliki fungsi transfer lebih dikenal dengan Feedback Konpensator, merupakan bentuk aplikasi dari penyelesaian persamaan matriks P(s) X (s) Q (s) = K (s) tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Anonim, 1997, *Computation of the Generallized Invers of a Polynomial Matrix and Applications*, Departement of Mathematical Sciences Loughborough University Of Technology, Leics LEII3TU, United Kingdom.

Bapat, R.B., 1992, *The Moore- Penrose Invers Over a Commutative Rings, Linier Algebra and It's Application*, El Sevier Science Publishing Co . Inc. New York.

Karampetakis, 1996 , *Computation of the Generalized Invers of two Variable Polinomial Matrices and Applikation*, Proccedings of the 4th IEEE Mediterranean Symposium on New Directions in Control and Automation, June 10-13, Maleme, Krete, Greecwe, pp 220-22

Kucera, 1993, *Diophantique Equation in Cotrol- A(s)* Survey, Automatica, 29:1361-1471

Older, G.J, 1994, *Mathematical Sistems Theory*, Faculty of Technical Mathematics and Informtics Delft University of Technology, Netherlands.

Penrose, 1985, *A. Generalized Inverse for Matrices*, Proc. Cambridge Philos, Soc. 51 : 406-413

Sontag, E.D. 1980, *On Generalized Inverse of Polynomial and Other Mattrics*, IEEE, Trans. On Automatic Control, AC-25