

**CARA LAIN PEMBUKTIAN TEOEMA ARZELA-ASCOLI DAN HUBUNGANNYA DENGAN  
EKSISTENSI PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL  
(SUATU KAJIAN TEORITIS)**

Sufri

Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jambi Kampus Pinang Masak  
Jl. Raya Jambi-Ma.Bulian KM.15 Mendalo Darat Jambi 36361

ABSTRAK

Tujuan utama dari tulisan ini adalah untuk mengetahui cara lain dalam membuktikan teorema Arzela-Ascoli sehingga memudahkan untuk memahami substansi dari teorema tersebut. Teorema Arzela-Ascoli dapat dijadikan dasar untuk memahami tentang eksistensi penyelesaian suatu persamaan diferensial. Teorema Arzela-Ascoli berbunyi sebagai berikut : Misalkan  $K$  **ruang metrik kompak**,  $f_n$  fungsi bernilai nyata (real) kontinu pada  $K$ , dan  $\langle f_n \rangle$  barisan **terbatas titik demi titik** dan **ekuikontinu** pada  $K$ , maka (i).  $\langle f_n \rangle$  **terbatas seragam** pada  $K$ , (ii).  $\langle f_n \rangle$  memuat sub-barisan yang **konvergen seragam** pada  $K$ . Dalam tulisan ini akan dibuktikan bagian (i) dan (ii). Khusus bagian (ii) akan dibuktikan dengan cara lain setelah dibuktikan dengan cara yang konvensional. Selanjutnya teorema ini akan dikaitkan dengan **teorema Peano** dengan tujuan untuk memahami peranan kedua teorema tersebut terhadap eksistensi penyelesaian persamaan diferensial.

Kata-kata kunci : Ruang Metrik Kompak, Terbatas titik demi titik, Ekuikontinu, Terbatas seragam, dan konvergen seragam

**I. PENDAHULUAN**

Teorema Arzela-Ascoli merupakan salah satu teorema penting dalam matematika analisis. Teorema Arzela-Ascoli bersama-sama dengan teorema Peano sering dikaitkan dengan eksistensi penyelesaian persamaan diferensial biasa.

Banyak permasalahan dalam penyelesaian persamaan diferensial yang berbentuk :

$$dy/dx = f(x,y) \dots\dots\dots (1)$$

dengan syarat awal

$$y(x_0) = y_0 \dots\dots\dots (2)$$

dengan  $f$  fungsi bernilai nyata (real) yang terdefinisi pada  $R^2$ . Penyelesaian persamaan (1) dengan syarat awal persamaan (2) dimaksudkan adalah suatu fungsi, katakan  $g$  dengan domain memuat suatu interval  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ , sehingga  $g(x_0) = y_0$  dan

$$g'(x) = f[x, g(x)], \text{ dengan } |x - x_0| < \delta \dots\dots\dots (3)$$

Melalui pengintegralan persamaan (3) ekuivalen dengan,

$$g(x) = y_0 + \int f [t, g(t)] dt,$$

$$\text{dengan } |x - x_0| < \delta \dots\dots\dots (4)$$

dengan batas atas dan bawah integrasi berturut-turut adalah  $x$  dan  $x_0$ .

Berdasarkan uraian di atas muncul suatu pertanyaan tentang eksistensi dari penyelesaian persamaan (1) dan (2) apakah ekuivalen dengan eksistensi suatu fungsi, katakan  $g$  yang memenuhi persamaan (4) untuk suatu nilai  $\delta$ . Sekarang akan dicari syarat kecukupan bagi fungsi  $f$  yang menjamin adanya (eksistensi) dan ketunggalan dari fungsi  $g$  yang memenuhi persamaan (4).

## II. LANDASAN TEORI

Pada bagian ini terlebih dahulu dikemukakan beberapa pengertian tentang berbagai istilah yang berkaitan dengan fokus pembahasan.

### Definisi 1 :

Misalkan  $\mathfrak{F}$  keluarga fungsi yang memuat fungsi  $f_i$  ;  $i = 1,2,3,4,5, \dots$  terdefinisi pada interval  $[a, b]$  dikatakan **terbatas seragam**, jika terdapat suatu bilangan  $B > 0$ , sedemikian hingga  $|f_i(x)| < B$ , untuk setiap  $x \in [a, b]$  dan untuk setiap  $i$ . (Goldberg, 1976 dan Rudin 1976)

### Definisi 2 :

Misalkan  $\mathfrak{F}$  keluarga fungsi yang memuat fungsi  $f_i$  ;  $i = 1,2,3, \dots$  terdefinisi pada interval tertutup  $[a, b]$  disebut **ekuikontinu** pada  $[a, b]$ , jika diberi  $\varepsilon > 0$ , terdapat  $\delta > 0$ , sehingga untuk setiap  $i, f_i \in \mathfrak{F}$  dan  $x, y \in [a, b]$  dengan  $|x - y| < \delta$ , berlaku  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ . (Royden, 1989 dan Apostol, 1974 )

### Definisi 3 :

Ruang Metrik  $\langle M, \rho \rangle$  dikatakan **kompak** jika  $\langle M, \rho \rangle$  lengkap dan terbatas total. (Goldberg, 1976 dan Soemantri, 1988)

### Definisi 4 :

Misalkan himpunan  $A$  subset dari ruang metrik  $\langle M, \rho \rangle$  dan  $\varepsilon > 0$ . Suatu himpunan berhingga  $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$  disebut suatu **jaringan epsilon ( $\varepsilon$  - net)** untuk himpunan  $X$ , jika untuk setiap titik  $a \in A$ , terdapat  $x' \in X$ , sedemikian hingga  $d(a, x') < \varepsilon$ . (Simon, 1963)

### Definisi 5 :

Himpunan  $A$  subset dari ruang metrik  $\langle M, \rho \rangle$  disebut **terbatas seragam**, jika  $A$  memiliki jaringan epsilon ( $\varepsilon$  - net) untuk setiap  $\varepsilon > 0$ . (Simon, 1963)

Kelima definisi di atas akan digunakan sebagai dasar untuk membuktikan teorema-teorema yang berkaitan dengan fokus penelitian.

## III. PEMBAHASAN

Pembahasan dalam penelitian ini akan dimulai dengan membuktikan teorema-teorema berikut.

### Teorema 1 :

Keluarga fungsi  $\mathfrak{F}$  yang memuat fungsi-fungsi kontinu  $f_i$  ;  $i = 1,2,3, \dots$  terdefinisi pada interval  $[a, b]$  kompak relatif dalam ruang metrik  $C[a, b]$  jika dan hanya jika  $\mathfrak{F}$  terbatas seragam dan ekuikontinu.

### Bukti :

Misalkan  $\mathfrak{F}$  keluarga fungsi itu dan  $f_i \in \mathfrak{F}$  adalah fungsi kontinu dan terdefinisi pada  $[a, b]$  untuk setiap  $i$ , akan dibuktikan  $\mathfrak{F}$  kompak relatif dalam  $C[a, b]$ , jika dan hanya jika  $\mathfrak{F}$  terbatas seragam dan ekuikontinu.

(i). Dibuktikan syarat perlu yaitu, jika  $\mathfrak{F}$  kompak relatif dalam  $C[a, b]$  maka  $\mathfrak{F}$  terbatas seragam dan ekuikontinu.

Misalkan  $\mathfrak{F}$  kompak relatif dalam  $C[a, b]$ , maka untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat  $\varepsilon$  - net berhingga  $f_i$  ;  $i = 1,2,3, \dots, n$  dalam  $\mathfrak{F}$ . Karena  $\mathfrak{F}$  adalah keluarga fungsi kontinu dan terdefinisi pada  $[a, b]$  maka untuk setiap  $i, f_i \in \mathfrak{F}$  terbatas pada  $[a, b]$ , artinya terdapat  $B_i > 0$  sedemikian hingga  $|f_i(x)| < B_i$  untuk setiap  $x \in [a, b]$ . Berdasarkan  $\varepsilon$  - net jika diberikan sembarang  $f \in \mathfrak{F}$ , maka terdapat sekurang-kurangnya satu  $g \in \mathfrak{F}$ , sedemikian hingga :

$d(f, g) = \text{maksimum } |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon/3$ ,  
untuk setiap  $x \in [a, b]$

Karena  $||f(x) - g(x)|| \leq |f(x) - g(x)| < \varepsilon/3$ , maka  $|f(x)| \leq |g(x)| + \varepsilon/3 < B_i + \varepsilon/3 < B$ , dengan  $B = \text{maksimum } \{B_1, B_2, B_3, \dots, B_n\} + \varepsilon/3$ . Dengan demikian diperoleh pernyataan berikut, “terdapat  $B > 0$ , sehingga untuk setiap  $x \in [a, b]$  dan untuk setiap  $f_i \in \mathfrak{F}$  berlaku  $|f(x)| < B$ ”. Ini menunjukkan  $\mathfrak{F}$  **terbatas seragam**.

Selanjutnya berikut ini akan ditunjukkan  $\mathfrak{F}$  ekuikontinu sebagai berikut, karena untuk setiap  $f_i$  ( $i$

= 1, 2, 3, ..., n) dalam  $\varepsilon$  - net kontinu pada  $[a, b]$ , maka  $f_i$  kontinu seragam pada  $[a, b]$ , ini berarti jika diberikan  $\varepsilon > 0$  maka terdapat  $\delta_i > 0$  dan untuk setiap  $x_1, x_2 \in [a, b]$  dengan  $|x_1 - x_2| < \delta_i$  berlaku  $|f_i(x_1) - f_i(x_2)| \leq \varepsilon/3$ . Selanjutnya jika diberikan sembarang  $f \in \mathfrak{F}$ , maka dapat dipilih  $f_i$  sedemikian hingga  $d(f, f_i) < \varepsilon/3$  dan jika  $|x_1 - x_2| < \delta$  dengan  $\delta = \text{minimum}(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n)$ , maka akan diperoleh ketidaksamaan berikut,  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f_i(x_1)| + |f_i(x_1) - f_i(x_2)| + |f_i(x_2) - f(x_2)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$ . Hasil terakhir ini menunjukkan keluarga fungsi  $\mathfrak{F}$  ekuikontinu pada  $[a, b]$ .

(ii). Dibuktikan syarat cukup, yaitu jika keluarga fungsi  $\mathfrak{F}$  terbatas seragam dan ekuikontinu pada  $[a, b]$  maka keluarga fungsi  $\mathfrak{F}$  kompak relatif dalam  $C[a, b]$ .

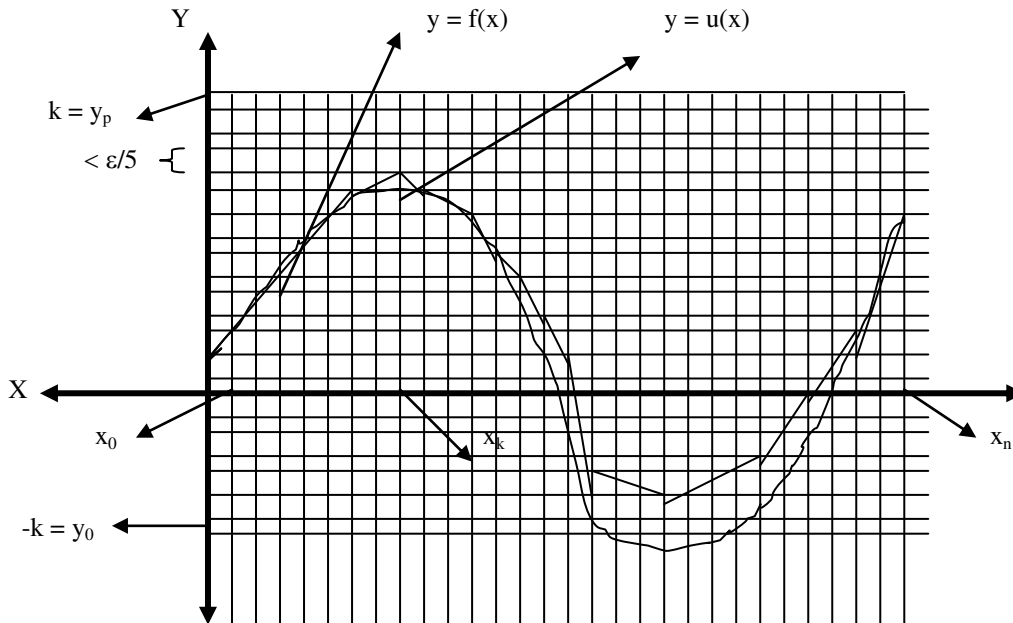
Misalkan keluarga fungsi  $\mathfrak{F}$  terbatas seragam dan ekuikontinu pada  $[a, b]$ , menurut teorema untuk membuktikan keluarga fungsi  $\mathfrak{F}$  kompak relatif dalam  $C[a, b]$  cukup ditunjukkan keluarga fungsi  $\mathfrak{F}$  terbatas total pada  $[a, b]$ , artinya harus dapat ditunjukkan, apabila diberi  $\varepsilon > 0$ , maka terdapat  $\varepsilon$  - net yang berhingga untuk keluarga fungsi  $\mathfrak{F}$  dalam  $C[a, b]$ .

Karena keluarga fungsi  $\mathfrak{F}$  terbatas seragam dan ekuikontinu pada  $[a, b]$  maka diperoleh,

1. Terdapat  $k > 0$ , sehingga untuk setiap  $x \in [a, b]$  dan  $f \in \mathfrak{F}$  berlaku  $|f(x)| < k$ .
2. Untuk setiap  $\varepsilon > 0$  maka terdapat  $\delta > 0$ , sehingga untuk setiap  $x_1, x_2 \in [a, b]$  dan untuk setiap  $f \in \mathfrak{F}$  dengan  $|x_1 - x_2| < \delta$  berlaku  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon/5$ .

Untuk menunjukkan eksistensi jaringan epsilon ( $\varepsilon$  - net) berhingga untuk keluarga fungsi  $\mathfrak{F}$  dalam  $C[a, b]$ , interval  $[a, b]$  dibagi sepanjang sumbu X menjadi n subinterval yang panjangnya setiap subinterval lebih kecil dari  $\delta$ . Sebut titik-titik ujung subinterval dengan  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  sehingga dapat

ditulis,  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ . Melalui titik-titik ini dilukis garis-garis vertikal yang sejajar sumbu Y. Dengan jalan yang sama interval  $[-k, k]$  pada sumbu Y dibagi menjadi p subinterval yang panjang setiap subinterval lebih kecil dari  $\varepsilon/5$ . Sebut titik-titik ujung subinterval dengan  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_p$  sehingga dapat ditulis,  $-k = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_p = k$ . Melalui titik-titik ini dilukis garis-garis horizontal yang sejajar sumbu X. Dengan proses ini persegi panjang  $a \leq x \leq b, -k \leq y \leq k$  terpartisi menjadi np sel dengan sisi horizontalnya  $< \delta$  dan sisi vertikalnya  $< \varepsilon/5$ , seperti yang ditunjukkan pada gambar di bawah ini,



Setiap fungsi  $f \in \mathfrak{F}$  dikaitkan dengan suatu garis poligon  $y = u(x)$ , dengan  $y = u(x)$  berpuncak di titik-titik yang berbentuk  $(x_k, y_k)$  dan di setiap titik  $x_k \in [a, b]$  berlaku  $|f(x_k) - u(x_k)| < \epsilon/5$ . Dengan demikian dapat ditulis,

- (i).  $|f(x_k) - u(x_k)| < \epsilon/5$
- (ii).  $|f(x_{k+1}) - u(x_{k+1})| < \epsilon/5$
- (iii).  $|f(x_k) - u(x_{k+1})| < \epsilon/5$

Dengan mengkontruksi ketiga pertidaksamaan di atas diperoleh,

$$|u(x_k) - u(x_{k+1})| \leq |u(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x_{k+1})| + |f(x_{k+1}) - u(x_{k+1})| < \epsilon/5 + \epsilon/5 + \epsilon/5 = 3\epsilon/5.$$

Karena  $y = u(x)$  linier di antara titik-titik  $x_k$  dan  $x_{k+1}$ , maka untuk setiap  $x \in [x_k, x_{k+1}]$  akan berlaku  $|u(x_k) - u(x)| < 3\epsilon/5$ .

Misalkan  $x \in [a, b]$  dan  $x_k$  pada sub interval yang paling dekat ke  $x$  dari kiri, maka dapat ditulis,

$$|f(x_k) - u(x)| \leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - u(x_k)| + |u(x_k) - u(x)|$$

$$< \epsilon/5 + \epsilon/5 + 3\epsilon/5 = 5\epsilon/5 = \epsilon$$

Ini menunjukkan himpunan garis-garis poligon  $y = u(x)$  membentuk  $\epsilon$ -net bagi keluarga fungsi  $\mathfrak{F}$ . Karena setiap  $u$  nilainya ditentukan di  $(n+1)$  titik-titik  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ , maka dengan demikian terdapat sejumlah berhingga garis-garis poligon  $y = u(x)$ . Selanjutnya untuk setiap  $i$ ,  $u(x_i)$  harus merupakan salah satu dari  $(p+1)$  bilangan-bilangan  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_p$ . Oleh karena itu terdapat paling banyak  $(p+1)^{n+1}$  fungsi  $u$ . Artinya terdapat sejumlah berhingga cakram  $V(u, \epsilon/5)$  yang masing-masing berdiameter lebih kecil dari  $\epsilon$ , dan gabungan semua cakram ini pasti memuat keluarga fungsi  $\mathfrak{F}$ . Ini menunjukkan keluarga fungsi  $\mathfrak{F}$  terbatas total pada  $[a, b]$ , dengan kata lain keluarga fungsi  $\mathfrak{F}$  kompak relatif dalam  $C[a, b]$ .

**Teorema 2 (Arzela-Ascoli)**

Jika  $K$  ruang metrik kompak,  $f_n$  fungsi bernilai riil kontinu pada  $K$ ,  $\langle f_n \rangle$  barisan terbatas titik demi titik dan ekuikontinu pada  $K$ , maka (i).  $\langle f_n \rangle$  terbatas seragam pada  $K$ , (ii).  $\langle f_n \rangle$  memuat sub-barisan yang konvergen seragam pada  $K$ .

**Bukti**

(i). Diberikan  $\varepsilon > 0$ , karena  $\langle f_n \rangle$  ekuikontinu pada  $K$ , maka terdapat  $\delta > 0$ , sehingga untuk semua  $x$  dan  $y$  di dalam  $K$  dengan  $d(x,y) < \delta$  dan untuk semua  $n \in \mathbb{N}$  berlaku,

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \dots\dots\dots (1)$$

Karena  $K$  kompak maka terdapat titik-titik yang cacahnya berhingga, katakan  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_r$  yang semuanya dalam  $K$ , sehingga dapat ditulis,

$$K \subset \cup_{i=1}^r N_\delta(p_i), \text{ dengan } N_\delta(p_i) = \{x \mid d(p_i, x) < \delta\}, i = 1, 2, 3, \dots, r.$$

Karena  $\langle f_n \rangle$  terbatas titik demi titik pada  $K$ , maka terdapat bilangan riil  $M_i$  sehingga  $|f_n(p_i)| < M_i$  untuk semua  $n \in \mathbb{N}$ .

Ambil  $M = \text{maksimum} \{M_1, M_2, M_3, \dots, M_r\}$  dan untuk sebarang  $x \in K$  terdapat suatu  $i$  dengan  $1 \leq i \leq r$  sehingga  $x \in N_\delta(p_i)$ . Jadi berdasarkan (1) berlaku  $|f_n(x) - f_n(p_i)| < \varepsilon$  untuk semua  $n \in \mathbb{N}$ . Dengan demikian untuk sembarang  $x \in K$  dan sembarang  $n \in \mathbb{N}$  berlaku,  $||f_n(x)| - |f_n(p_i)|| \leq |f_n(x) - f_n(p_i)| < \varepsilon \Rightarrow |f_n(x)| < |f_n(p_i)| + \varepsilon < M + \varepsilon$ .

Pertidaksamaan terakhir ini menunjukkan  $\langle f_n \rangle$  **terbatas seragam pada  $K$** , artinya (i) terbukti.

(ii). Karena  $K$  ruang metrik kompak, maka  $K$  memuat subhimpunan terbilang yang rapat (dense) pada  $K$ . Karena  $\langle f_n \rangle$  terbatas titik demi titik pada  $K$  dan  $E$  subhimpunan terbilang di dalam  $K$  maka  $\langle f_n \rangle$  memuat suatu subbarisan, katakan  $\langle f_{n_k} \rangle$  sehingga  $\langle f_{n_k} \rangle$  konvergen di setiap  $x \in E$ .

Misalkan  $\varepsilon > 0$  dan ambil  $\delta > 0$ , karena  $E$  rapat dalam himpunan kompak  $K$ , maka terdapat titik-titik anggota  $E$  yang cacahnya berhingga, sebut saja dengan  $x_1, x_2, \dots, x_s$ , sehingga dapat ditulis,

$$K \subset \cup N(x_i) \dots\dots\dots (2)$$

Guna memudahkan penulisan sebut  $f_{n_k} = h_k$ . untuk membuktikan subbarisan  $\langle h_k \rangle$  konvergen seragam pada  $K$  dapat ditunjukkan dengan argumentasi berikut. Karena  $\langle h_k \rangle$  konvergen di setiap titik anggota  $E$ , maka masing-masing barisan bilangan  $\langle h_k(x_1) \rangle, \langle h_k(x_2) \rangle, \langle h_k(x_3) \rangle, \dots, \langle h_k(x_n) \rangle$  adalah konvergen. Menurut kriteria **Cauchy** sesuai dengan  $\varepsilon > 0$  di atas terdapat  $P$ , sehingga untuk  $n \geq P$  dan  $m \geq P$ , berlaku

$$|h_n(x_j) - h_m(x_j)| < \varepsilon, \text{ untuk } j = 1, 2, 3, \dots, s \dots\dots (3)$$

Berdasarkan (2) untuk sembarang  $x \in K$  terdapat suatu  $q$  dengan  $1 \leq q \leq s$ , sehingga  $x \in N_\delta(x_q)$ , juga berdasarkan (1) dan karena  $h_k$  adalah suatu fungsi anggota barisan  $\langle f_n \rangle$  tentu berlaku,

$$|h_k(x) - h_k(x_q)| < \varepsilon, \text{ untuk setiap } k \in \mathbb{N} \dots\dots (4)$$

Jika  $n \geq p$  dan  $m \geq p$  dan dengan memperhatikan (3) dan (4) diperoleh,

$$|h_n(x) - h_m(x)| \leq |h_n(x) - h_n(x_q)| + |h_n(x_q) - h_m(x_q)| + |h_m(x_q) - h_m(x)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Dengan demikian dapat dikatakan, untuk setiap  $\varepsilon > 0$  yang diberikan terdapat  $p$  sedemikian hingga untuk setiap  $n \geq p, m \geq p$ , dan  $x \in K$  berlaku,  $|h_n(x) - h_m(x)| < 3\varepsilon$ . Hal ini menunjukkan barisan  $\langle f_{n_k} \rangle = \langle h_k \rangle$  konvergen seragam pada  $K$ .

**Bukti lain dari (ii)**

Diberikan  $\varepsilon > 0$ , Karena  $K$  kompak, maka terdapat subhimpunan terbilang katakan  $E$  yang rapat dalam  $K$  ( $E \subset K$ ). Oleh karena itu terdapat  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_s \in E$ , sehingga dapat ditulis  $K \subset \cup N_\delta(x_i); i = 1, 2, 3, \dots, s$ .

Karena  $E \subset K, K$  kompak, dan barisan  $\langle f_n \rangle$  terbatas titik demi titik pada  $K$ , akibatnya  $\langle f_n \rangle$  juga terbatas titik demi titik pada  $E$ . Selanjutnya karena  $E$

himpunan terbilang maka E dapat disajikan dalam bentuk  $E = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ . Dengan demikian  $\langle f_n \rangle$  adalah barisan bilangan terbatas pada R (himpunan bilangan nyata) atau di  $R^2$  (bidang Kartesius), jadi  $\langle f_n \rangle$  pasti memuat subbarisan yang konvergen, sebut barisan itu  $\langle f_{1n} \rangle$ ;  $n \in N$  (himpunan bilangan asli). Demikian juga  $\langle f_{1n} \rangle$  adalah barisan terbatas, berarti  $\langle f_{1n} \rangle$  memuat subbarisan yang konvergen, sebut barisan itu dengan  $\langle f_{2n} \rangle$ , demikian seterusnya proses ini dikerjakan sehingga dapat disajikan dalam bentuk berikut.

S :	$f_1$	$f_2$	$f_2$	$f_3$
	$f_4$	$f_5$	...	
S <sub>1</sub> :	$f_{11}$	$f_{12}$	$f_{13}$	$f_{14}$
	$f_{15}$	$f_{16}$	... konvergen di p <sub>1</sub>	
S <sub>2</sub> :	$f_{21}$	$f_{22}$	$f_{23}$	$f_{24}$
	$f_{25}$	$f_{26}$	... konvergen di p <sub>2</sub>	
S <sub>3</sub> :	$f_{31}$	$f_{32}$	$f_{33}$	$f_{34}$
	$f_{35}$	$f_{36}$	... konvergen di p <sub>3</sub>	
S <sub>n-1</sub> :	$f_{n-11}$	$f_{n-12}$	$f_{n-13}$	$f_{n-14}$
	$f_{n-15}$	$f_{n-16}$	... konvergen di p <sub>n-1</sub>	
S <sub>n</sub> :	$f_{n1}$	$f_{n2}$	$f_{n3}$	$f_{n4}$
	$f_{n5}$	$f_{n6}$	... konvergen di p <sub>n</sub>	

Perhatikan bahwa barisan-barisan S, S<sub>1</sub>, S<sub>2</sub>, S<sub>3</sub>, ..., S<sub>n-1</sub>, S<sub>n</sub> di atas bersifat S<sub>1</sub> adalah subbarisan S, S<sub>2</sub> subbarisan dari S<sub>1</sub>, S<sub>3</sub> subbarisan S<sub>2</sub> dan S<sub>n</sub> subbarisan S<sub>n-1</sub> untuk setiap n = 2, 3, 4, ... dengan S<sub>n</sub> konvergen di p<sub>n</sub>. Sebut barisan f<sub>11</sub>, f<sub>22</sub>, f<sub>33</sub>, f<sub>33</sub>, ... dengan Z, sehingga dapat ditulis, Z : f<sub>11</sub>, f<sub>22</sub>, f<sub>33</sub>, f<sub>33</sub>, ... . Jelas Z adalah subbarisan dari S =  $\langle f_n \rangle$ , kecuali mungkin (n-1) suku pertama dari Z. Jadi suku-suku dari Z merupakan subbarisan dari S<sub>n</sub>, berarti f<sub>1n</sub>, f<sub>n+1,n+1</sub>, f<sub>n+2,n+2</sub>, f<sub>n+3,n+3</sub>, ... adalah subbarisan dari S<sub>n</sub> dengan demikian semuanya konvergen di p<sub>n</sub>. Akibatnya Z juga konvergen di p<sub>n</sub>; n = 1, 2, 3, .... Karena E = {p<sub>1</sub>, p<sub>2</sub>, p<sub>3</sub>, ...}, maka Z konvergen pada E. Jadi telah ditemukan Z

subbarisan dari S =  $\langle f_n \rangle$  yang konvergen di setiap titik anggota E.

Selanjutnya akan dibuktikan Z konvergen seragam pada K. Sebut Z =  $\langle g_k \rangle$ ; k ∈ N subbarisan dari  $\langle f_n \rangle$ . Karena  $\langle f_n \rangle$  ekuikontinu pada K, maka barisan Z =  $\langle g_k \rangle$  ekuikontinu pada K, berarti untuk setiap x,y ∈ K, dengan d(x,y) < δ dan untuk setiap k ∈ N berlaku,

$$|g_k(x) - g_k(y)| < \epsilon/3 \dots\dots\dots (1)$$

Z =  $\langle g_k \rangle$  konvergen di x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>, x<sub>3</sub>, ..., x<sub>s</sub> ∈ E, maka terdapat p ∈ N sehingga untuk setiap k dan l yang lebih besar dari p (k ≥ p dan l ≥ p) berlaku,

$$|g_k(x_i) - g_l(x_i)| < \epsilon/3 \dots\dots\dots (2)$$

Ambil sembarang x ∈ K, maka terdapat m dengan 1 ≤ m < s, sedemikian hingga x ∈ N<sub>δ</sub>(x<sub>m</sub>), akibatnya d(x, x<sub>m</sub>) < δ, sehingga berlaku

$$|g_m(x) - g_m(x_m)| < \epsilon/3 \dots\dots\dots (3)$$

Berdasarkan (1), (2), dan (3) dan untuk setiap k ≥ p dan l ≥ p diperoleh,

$$\begin{aligned} |g_k(x) - g_l(x)| &= |g_k(x) - g_k(x_m) + g_k(x_m) - g_l(x_m) + g_l(x_m) - g_l(x)| \\ &\leq |g_k(x) - g_k(x_m)| + |g_k(x_m) - g_l(x_m)| + |g_l(x_m) - g_l(x)| \\ &< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon \end{aligned}$$

Jadi dapat disimpulkan jika diberi ε > 0, terdapat p sehingga untuk setiap k ≥ p, l ≥ p, dan untuk setiap x ∈ K berlaku |g<sub>k</sub>(x) - g<sub>l</sub>(x)| < ε. Ini menunjukkan barisan Z =  $\langle g_k \rangle$  konvergen seragam pada K.

**Teorema 3 :**

Misalkan f(x,y) terdefinisi dan kontinu pada suatu domain bidang G. Maka sekurang-kurangnya terdapat satu kurva integral (kurva penyelesaian) dari persamaan diferensial dy/dx = f(x,y) lewat melalui setiap titik (x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>) pada G.

Dengan kata lain teorema ini mengatakan, jika diberikan sebarang titik (x<sub>0</sub>,y<sub>0</sub>) dapat dibuat himpunan kompak G' ⊂ G sedemikian hingga (x<sub>0</sub>,

$y_0) \in G' \subset G$ , maka terdapat paling sedikit satu kurva penyelesaian dari persamaan diferensial  $dy/dx = f(x,y)$  lewat melalui titik  $(x_0, y_0) \in G' \subset G$ .

**Bukti :**

Diberikan sebarang himpunan kompak  $G' \subset G$  dan sebarang titik  $(x_0, y_0) \in G'$ , karena  $f$  kontinu pada  $G$ , maka  $f$  terbatas pada  $G' \subset G$ . Oleh karena itu terdapat bilangan  $K > 0$ , sehingga untuk setiap  $(x, y) \in G'$  berlaku  $|f(x,y)| \leq K$ .

Pada bidang  $G$  lukis garis-garis dengan koefisien arah  $K$  dan  $-K$  yang keduanya melalui titik  $(x_0, y_0)$ . Lukis garis-garis  $x = a$  dan  $x = b$  ( $a < x_0 < b$ ), sehingga dengan cara ini akan terlukis dua segitiga sama kaki yang salah satu titik sudutnya bersekutu di titik  $(x_0, y_0)$ . Selanjutnya dikonstruksi suatu keluarga garis-garis poligon disebut garis Euler (Rudin, 1976) yang bersesuaian dengan persamaan diferensial  $dy/dx = f(x,y)$  dengan cara sebagai berikut.

- a. Lukis garis melalui titik  $(x_0, y_0)$  dengan kemiringan  $f(x_0, y_0)$ . Pada garis ini ambil sembarang titik  $(x_1, y_1)$  dengan  $x_1 \in [a, b]$ .
- b. Lukis garis yang melalui titik  $(x_1, y_1)$  dengan kemiringan  $f(x_1, y_1)$ . Pada garis ini ambil titik  $(x_2, y_2)$ , dengan  $x_2 \in [a, b]$ .
- c. Demikian seterusnya proses ini dilanjutkan sampai tak berhingga kali.

Selanjutnya dikonstruksi suatu barisan yang terdiri dari garis-garis Euler tersebut yang melalui titik  $(x_0, y_0)$ . Sebut barisan ini dengan  $\langle Q_n \rangle$ , jelas untuk setiap  $n$ ,  $Q_n$  pasti berada di dalam daerah segitiga yang terbentuk, karena kemiringan masing-masing segmen garis pembangun  $Q_n$  tidak akan melebihi  $K$  dan tidak akan kurang dari  $-K$ .

Dari keluarga garis-garis Euler yang terbentuk di atas, dibuat barisan garis-garis Euler dengan sifat "ukuran terpanjang" dari segmen garis yang membangun  $Q_n$  mendekati nol (0), apabila  $n$  mendekati tak berhingga ( $n \rightarrow \infty$ ). Dengan prinsip

di atas misalkan  $\varphi_n$  adalah suatu fungsi dengan grafik  $Q_n$ . Ini berarti  $\langle Q_n \rangle$  terdefinisi pada  $[a, b]$ . Karena persamaan garis yang melalui  $(x_0, y_0)$  dengan kemiringan  $K$  adalah  $y = K(x - x_0) + y_0$ , dengan mengambil  $M = \max\{|K(a - x_0) + y_0|, |K(b - x_0) + y_0|\}$ , maka untuk setiap  $x \in [a, b]$  dan untuk setiap  $n \in \mathbb{N}$  berlaku,  $|\varphi_n| \leq M$ . Ini menunjukkan  $\langle \varphi_n \rangle$  terbatas seragam pada  $[a, b]$ , akibatnya  $\langle \varphi_n \rangle$  juga terbatas titik demi titik pada  $[a, b]$ .

Selanjutnya akan ditunjukkan  $\langle \varphi_n \rangle$  ekuikontinu pada  $[a, b]$  dengan cara sebagai berikut. Ambil sembarang  $\varphi \in \langle \varphi_n \rangle$  dan  $x', x'' \in [a, b]$ , dengan  $d(x', x'') < \delta$ , untuk  $x < x' < x''$  atau  $x'' < x' < x$ , berarti  $\varphi(x')$  dan  $\varphi(x'')$  bernilai paling besar atau terletak paling jauh pada daerah segitiga yang sebangun di atas sebab kemiringannya  $\leq K$ . Karena  $d(x', x'') < \delta$ , maka dapat ditulis (i).  $|x'' - x'| < \varepsilon/K$  atau  $|x'' - x'| < \varepsilon/K$ . (ii).  $x' < x_0 < x''$  dengan  $|x'' - x'| < \delta$ , akibatnya  $|x'' - x_0| < \delta$  dan  $|x_0 - x'| < \delta$ . Berdasarkan (i) dan (ii) diperoleh ketidaksamaan berikut,  $|\varphi(x'') - \varphi(x')| \leq |\varphi(x'') - \varphi(x_0)| + |\varphi(x_0) - \varphi(x')| < \varepsilon/2K + \varepsilon/2K = 2\varepsilon/2K = \varepsilon/K < \varepsilon$ . Jadi untuk setiap  $\varepsilon > 0$  dapat diambil  $\delta = \varepsilon/2K$ , sedemikian hingga untuk semua  $x, y \in [a, b]$ , dengan  $d(x', x'') < \delta$ , berlaku,  $|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| < \varepsilon$ , untuk semua  $n \in \mathbb{N}$  (himpunan bilangan asli). Ini menunjukkan barisan fungsi  $\langle \varphi_n \rangle$  ekuikontinu pada  $[a, b]$ .

Karena barisan fungsi  $\langle \varphi_n \rangle$  terbatas titik demi titik dan ekuikontinu pada  $[a, b]$ , maka menurut teorema Arzela-Ascoli, barisan  $\langle \varphi_n \rangle$  pasati memuat subbarisan katakan  $\langle \varphi^{(n)} \rangle$  yang konvvergen seragam ke suatu fungsi katakan  $\varphi(x)$  pada  $[a, b]$ . Misalkan  $\varphi(x) = \lim \langle \varphi^{(n)} \rangle$  untuk  $n$  mendekati tak berhingga, ini berarti  $y = \varphi(x)$  melalui titik  $(x_0, y_0) \in G' \subset G$ .

Selanjutnya akan ditunjukkan kurva  $y = \varphi$  (x) memenuhi persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ pada interval } (a, b), \text{ artinya harus}$$

ditunjukkan  $\forall \varepsilon > 0$  dan sembarang titik  $x', x'' \in (a, b)$  dan  $|x'' - x'|$  cukup kecil maka berlaku,

$$\left| \frac{\varphi(x'') - \varphi(x')}{x'' - x'} - f(x', \varphi(x')) \right| < \varepsilon, \dots \quad (1)$$

untuk  $n$  yang cukup besar dan  $|x'' - x'|$  cukup kecil pernyataan (1) ekuivalen dengan ,

$$\left| \frac{\varphi^{(9n)}(x'') - \varphi^{(n)}(x')}{x'' - x'} - f(x', \varphi(x')) \right| < \varepsilon, \dots \quad (2)$$

Sebelum membuktikan kurva  $y = \varphi(x)$  memenuhi persamaan diferensial  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  pada interval  $(a, b)$ , terlebih dahulu akan dibuktikan keekuivalenan persamaan (1) dan (2).

Bukti :

a. (1)  $\Rightarrow$  (2)

Misalkan  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{(9n)}(x) = \varphi(x)$ , maka  $\lim_{n \rightarrow \infty}$

$$\frac{\varphi^{(x)}(x'') - \varphi^{(n)}(x')}{x'' - x'} = \frac{\varphi(x'') - \varphi(x')}{x'' - x'}$$

, ini berarti untuk sembarang  $\varepsilon > 0$  terdapat  $p \in \mathbb{N}$ , sehingga untuk semua  $n \geq p$  berlaku,

$$\left| \frac{\varphi^{(x)}(x'') - \varphi^{(n)}(x')}{x'' - x'} - \frac{\varphi(x'') - \varphi(x')}{x'' - x'} \right| < \varepsilon \dots \quad (3)$$

untuk menyederhanakan, sebut

$$A = \frac{\varphi^{(x)}(x'') - \varphi^{(n)}(x')}{x'' - x'}, \quad B = \frac{\varphi^{(x)}(x'') - \varphi^{(n)}(x')}{x'' - x'}, \text{ dan } C = f(x', \varphi(x')) \dots \quad (4)$$

Berdasarkan (4), persamaan (3) dapat ditulis,  $|B - C| \leq |A - B| + |A - C| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ , ini membuktikan (1)  $\Rightarrow$  (2)

b. (2)  $\Rightarrow$  (1)

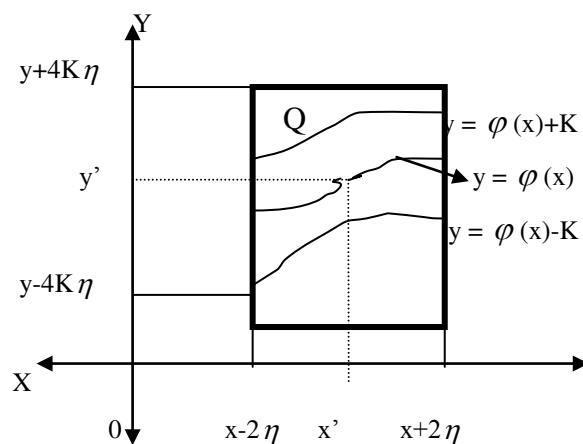
Telah diketahui bahwa  $|B - A| \leq \varepsilon$ ;  $|B - C| \leq \varepsilon$ , berdasarkan dua pernyataan ini dapat ditulis  $|A - C| \leq |A - B| + |B - C| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ , ini membuktikan (2)  $\Rightarrow$  (1).

Berdasarkan (a) dan (b) disimpulkan persamaan (1) ekuivalen dengan persamaan (2).

Selanjutnya misalkan  $y' = \varphi(x')$ , karena fungsi  $f$  kontinu maka untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat  $\eta > 0$ , sedemikian hingga  $|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon$  atau  $f(x', y') - \varepsilon < f(x, y) < f(x', y') + \varepsilon$ , asalkan  $|x - x'| < 2\eta$  dan  $|y - y'| < 4K\eta$ .  
..... (5)

Perhatikan bahwa himpunan titik-titik  $(x, y)$  yang memenuhi pertidaksamaan (5) adalah suatu persegi panjang, sebut persegi panjang itu dengan  $Q$ .

Misalkan  $N$  cukup besar, sehingga untuk semua  $n > N$ , panjang maksimum segmen garis yang membangun  $L_n < \eta$  dan  $|\varphi(x) - \varphi^{(n)}(x)| < K\eta$ . Ini berarti semua garis-garis Euler  $L_n$  dengan  $n > N$  akan terletak dalam persegi panjang  $Q$ , sebab  $L_n < \eta$  untuk setiap  $n > N$ , dengan  $0 < \eta < 2\eta$ , seperti yang diilustrasikan dalam gambar berikut.



Andaikan titik  $(a_0, b_0)$ ,  $(a_1, b_1)$ ,  $(a_2, b_2)$ , ...,  $(a_{k+1}, b_{k+1})$ , adalah titik-titik puncak segemen-segmen garis pembangun  $L_n$ , dengan  $a_0 \leq x' < a_1 < a_2 < \dots < a_k < x'' \leq a_{k+1}$ , maka dapat ditulis,

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)}(a_1) - \varphi^{(n)}(x') &= (a_1 - x') f(a_0, b_0) \\ \varphi^{(n)}(a_2) - \varphi^{(n)}(a_1) &= (a_2 - a_1) f(a_1, b_1) \\ &\dots \dots \dots (6) \\ \varphi^{(n)}(a_{i+1}) - \varphi^{(n)}(a_i) &= (a_{i+1} - a_i) f(a_i, b_i) \\ \varphi^{(n)}(x'') - \varphi^{(n)}(a_k) &= (x'' - a_k) f(a_k, b_k) \end{aligned}$$

dengan  $i = 1, 2, \dots, (k-1)$ . Dari (5) dan (6) dan jika  $|x'' - x'| < \eta$  akan diperoleh,

$$\begin{aligned} [f(x', y') - \varepsilon](a_1 - x') &< \varphi^{(n)}(a_1) - \varphi^{(n)}(x') < \\ [f(x', y') + \varepsilon](a_1 - x') & \\ [f(x', y') - \varepsilon](a_2 - a_1) &< \varphi^{(n)}(a_2) - \varphi^{(n)}(a_1) < \\ [f(x', y') + \varepsilon](a_2 - a_1) & \\ [f(x', y') - \varepsilon](a_3 - a_2) &< \varphi^{(n)}(a_3) - \varphi^{(n)}(a_2) < \\ [f(x', y') + \varepsilon](a_3 - a_2) & \\ [f(x', y') - \varepsilon](a_{i+1} - a_i) &< \varphi^{(n)}(a_{i+1}) - \varphi^{(n)}(a_i) < \\ [f(x', y') + \varepsilon](a_{i+1} - a_i) & \\ [f(x', y') - \varepsilon](x'' - a_k) &< \varphi^{(n)}(x'') - \varphi^{(n)}(a_k) < \\ [f(x', y') + \varepsilon](x'' - a_k) & \end{aligned}$$

Jika seluruh pertidaksamaan ini dijumlahkan, dan  $|x'' - x'| < \eta$  maka akan diperoleh,

$$\begin{aligned} [f(x', y') - \varepsilon](x'' - x') &< \varphi^{(n)}(x'') - \varphi^{(n)}(x') < \\ [f(x', y') + \varepsilon](x'' - x') & \dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

karena  $y' = \varphi(x')$ , maka bentuk persamaan (7) dapat ditulis menjadi,

$$\begin{aligned} f(x', y') - \varepsilon &< \\ \frac{\varphi^{(x)}(x'') - \varphi^{(n)}(x')}{x'' - x'} &< f(x', y') + \varepsilon \\ \Rightarrow f(x', (x'')) - \varepsilon &< \\ \frac{\varphi^{(x)}(x'') - \varphi^{(n)}(x')}{x'' - x'} &< f(x', \\ (x') + \varepsilon & \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{\varphi^{(x)}(x'') - \varphi^{(n)}(x')}{x'' - x'} - f(x', (x')) \right| < \varepsilon \dots \dots \dots (8)$$

Jelas terlihat bahwa bentuk pertidaksamaan (8) ekuivalen dengan bentuk pertidaksamaan (2). Dengan demikian terbukti bahwa  $y = \varphi(x)$  merupakan penyelesaian persamaan diferensial  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ .

**IV. KESIMPULAN**

Berdasarkan pembahasan di atas secara umum dapat disimpulkan bahwa,

1. Teorema **Azela-Ascoli** dapat dijadikan dasar untuk memahami **teorema eksistensi** tentang penyelesaian suatu persamaan diferensial.
2. Dengan teorema **Arzela-Ascoli** dan teorema **Peano** dapat dipahami tentang **eksistensi penyelesaian** suatu persamaan diferensial.

**Daftar Pustaka**

Apostol, L., 1974, *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts

Goldberg, R., 1976, *Methods of Real Analysis*, John Wiley & Sons, New York

Royden, H.L., 1989, *Real Analysis*, Macmillan Publishing Company, New York

Rudin, W., 1976, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill International Book Company, Ltd, Singapore

Simmon, G.F., 1963, Introduction to Topology and Modern Analysis, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd, Tokyo

Soemantri, R., 1988, Analisis Real I, Penerbit Karunika Jakarta, Universitas terbuka, Jakarta